Cadenas de Markov

José Antonio Camarena Ibarrola

Definiciones elementales

- El proceso discreto $\{X_k, k = 0, 1, 2, \ldots\}$ es denominado cadena de Markov si se cumple

$$P[X_k = j | X_{k-1} = i, X_{k-2} = n, \ldots, X_0 = m] = P[X_k = j | X_{k-1} = i] = p_{ijk}$$

  p_{ijk} es la probabilidad de que en el tiempo k, el proceso esté en el estado j dado que en el tiempo k-1 estaba en el estado i

Si la distribución de probabilidad de transición entre estados no cambia en el tiempo, la cadena de Markov es *homogénea*, para este tipo de cadenas de Markov $p_{ijk} = p_{ij}$

Definiciones elementales

- Para cadenas de Markov homogeneas

$$P[X_k = j | X_{k-1} = i, X_{k-2} = n, \ldots, X_0 = m] = P[X_k = j | X_{k-1} = i] = p_{ij}$$

1. $0 \leq p_{ij} \leq 1$
2. $\sum_j p_{ij} = 1, \; i = 1, 2, \ldots, n$

- La condición 2 dice que los estados son mutuamente exclusivos y colectívamente exhaustivos

Regla de la Cadena de Markov

- De la definiciones anteriores

$$P[X_k = j, X_{k-1} = i_1, X_{k-2}, \ldots, X_0]$$

$$= P[X_k = j | X_{k-1} = i_1, X_{k-2}, \ldots, X_0] P[X_{k-1} = i_1, X_{k-2} = i_2, \ldots, X_0 = i_k]$$

$$= P[X_k = j | X_{k-1} = i_1] P[X_{k-1} = i_1, X_{k-2}, \ldots, X_0 = i_k]$$

$$= P[X_k = j | X_{k-1} = i_1] P[X_{k-1} = i_1 | X_{k-2} = i_2, \ldots, X_0] P[X_{k-2} = i_2, \ldots, X_0]$$

$$= P[X_k = j | X_{k-1} = i_1] P[X_{k-1} = i_1 | X_{k-2} = i_2], \ldots, P[X_1 = i_{k-1} | X_0]$$

$$P[X_0 = i_k]$$

$$= p_{i_1 j} p_{i_2 i_1} p_{i_3 i_2} \ldots p_{i_k i_{k-1}} P[X_0 = i_k]$$

- Lo cual implica que si se conoce la distribución de probabilidades de estados iniciales se puede conocer

$$P[X_k, X_{k-1}, \ldots, X_0]$$

Matriz de transición entre estados

- Es común representar la distribución de transición entre estados como una matriz:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

- Es una matriz estocástica puesto que para cada renglón i, se cumple que $\sum_j p_{ij} = 1$

La probabilidad de transición de n pasos

$$p_{ij}(n) = P[X_{m+n} = j | X_m = i]$$

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$p_{ij}(1) = p_{ij}$$

Para dos pasos (n=2)

$$p_{ij}(2) = P[X_{m+2} = j | X_m = i]$$

- Si m=0

$$\begin{aligned} p_{ij}(2) &= P[X_2 = j | X_0 = i] \\ &= \sum_k P[X_2 = j, X_1 = k | X_0 = i] \\ &= \sum_k P[X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i] P[X_1 = k | X_0 = i] \\ &= \sum_k P[X_2 = j | X_1 = k] P[X_1 = k | X_0 = i] \\ &= \sum_k p_{kj} p_{ik} = \sum_k p_{ik} p_{kj} \end{aligned}$$

Las ecuaciones Chapman-Kolmogorov

- Se trata de una generalización del resultado obtenido anteriormente

For all $0 < r < n$,

$$p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}(r) p_{kj}(n-r)$$

- Demostración

$$\begin{aligned}
p_{ij}(n) &= P[X_n = j | X_0 = i] \\
&= \sum_k P[X_n = j, X_r = k | X_0 = i] \\
&= \sum_k P[X_n = j | X_r = k, X_0 = i] P[X_r = k | X_0 = i] \\
&= \sum_k P[X_n = j | X_r = k] P[X_r = k | X_0 = i] = \sum_k p_{kj}(n-r) p_{ik}(r) \\
&= \sum_k p_{ik}(r) p_{kj}(n-r)
\end{aligned}$$

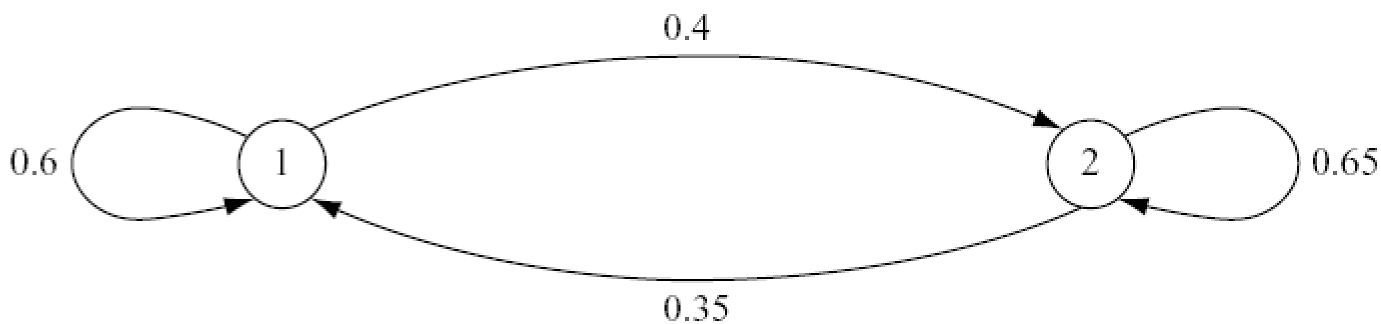
Matriz de transición de n pasos

$$P^n = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) & \dots & p_{1N}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & p_{23}(n) & \dots & p_{2N}(n) \\ p_{31}(n) & p_{32}(n) & p_{33}(n) & \dots & p_{3N}(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1}(n) & p_{N2}(n) & p_{N3}(n) & \dots & p_{NN}(n) \end{bmatrix}$$

Diagramas de transición

- Suponga que al arrojar una moneda, el resultado dependiera del lanzamiento anterior

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix}$$



Clases de estados

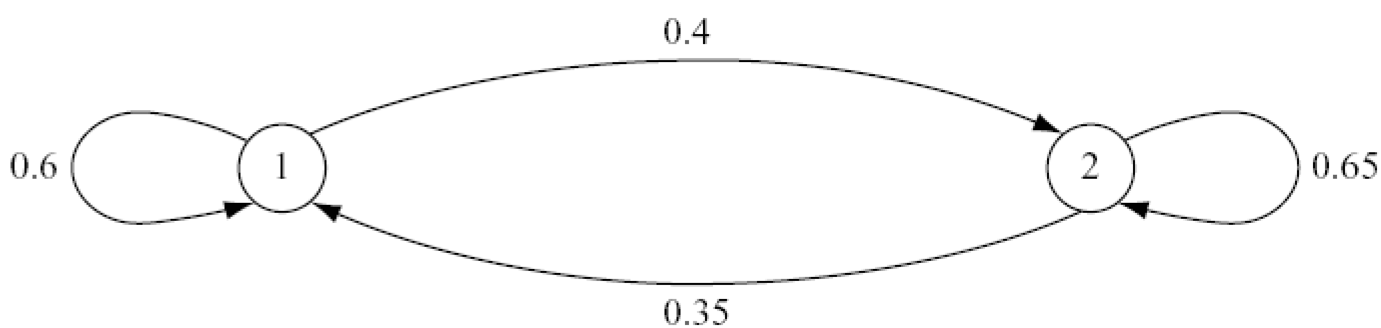
- Alcanzable. Un estado j es alcanzable desde algún estado i sii $p_{ij}(n) > 0$ for some $n > 0$.

Observe que la Matriz P^n nos brinda información de alcanzabilidad entre estados

- Dos estados se *comunican* si son alcanzables mútuamente
- El concepto de comunicación divide al espacio de estados en clases
- Dos estados que se comunican pertenecen a la misma clase
- Todos los estados de una misma clase se comunican entre sí
- Decimos que una clase es *cerrada* si ninguno de los estados que la conforman puede se alcanzado por ningún estado fuera de la clase

Cadenas de Markov irreductibles

- Son cadenas de Markov en las cuales todos los estados se comunican
- Eso implica que los estados conforman una única clase



Probabilidad de primera pasada

- Sea $f_{ij}(n)$ la probabilidad condicional de que dado que le proceso se encuentra actualmente en el estado i, la **primera vez** que entre al estado j ocurra en exactamente n transiciones (Probabilidad de *primera pasada* del estado i al j en n transiciones)

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)$$

- Probabilidad de *primera pasada* del estado i al j
- Es también la probabilidad de que alguna vez llegue al estado j dado que está en el estado i

Estados recurrentes y transitorios

- Método recursivo para determinar $f_{ij}(n)$

$$f_{ij}(1) = p_{ij}$$

$$f_{ij}(n) = \sum_{l \neq j} p_{il} f_{lj}(n-1)$$

- f_{ii} es la probabilidad de que eventualmente regrese al estado i
- Cualquier estado i para el que $f_{ii} = 1$ se conoce como estado *recurrente*
- Cualquier estado para el que $f_{ii} < 1$ se conoce como estado *transitorio*

Cadenas sencillas

- Un estado j es transitorio (o recurrente) si hay una probabilidad diferente de cero de que el proceso no regrese al estado j dado que está en el estado j
- Un estado j es recurrente (o persistente) si con probabilidad 1, el proceso eventualmente regresará al estado j dado que está en el estado j
- Un conjunto de estados recurrentes forman una cadena sencilla si cada uno de los estados del conjunto se comunica con cada uno de los demás estados del conjunto

Estados periódicos

- Un estado recurrente j es llamado *estado periódico* si existe un entero d (d>1) tal que $p_{jj}(n)$ es cero para todo n excepto para d, 2d, 3d ,…
- d es el periodo
- Si d=1 el estado es *aperiódico*
-

Cadenas ergódicas

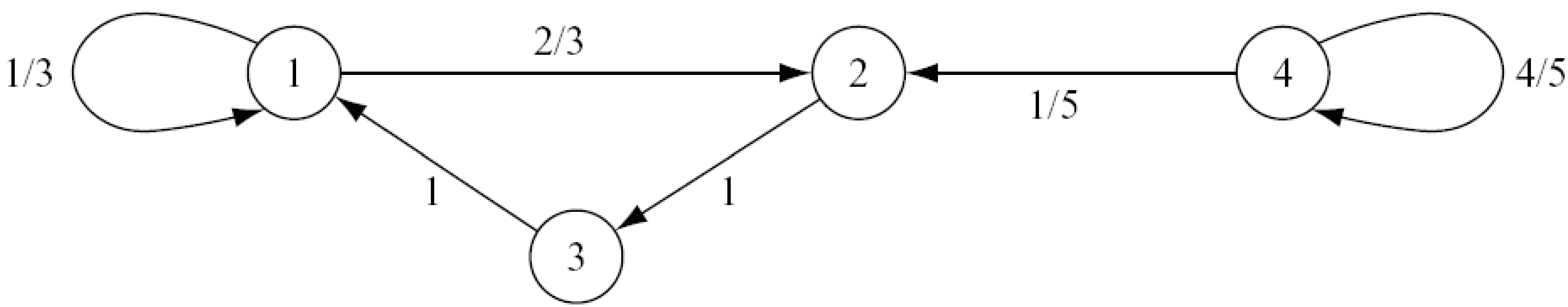
- Un estado recurrente es *recurrente positivo* si el número esperado de transiciones para que regrese a el es finito
- Un estado recurrente es *recurrente nulo* si el número esperado de transiciones para que regrese a el es infinito
- Si un estado es recurrente positivo y aperiódico, entonces se denomina *estado ergódico*
- Una cadena consistente de estados ergódicos se llama *cadena ergódica*

Estado absorbente

- Un estado para el cual $p_{jj} = 1$
- También se llaman *estados trampa*

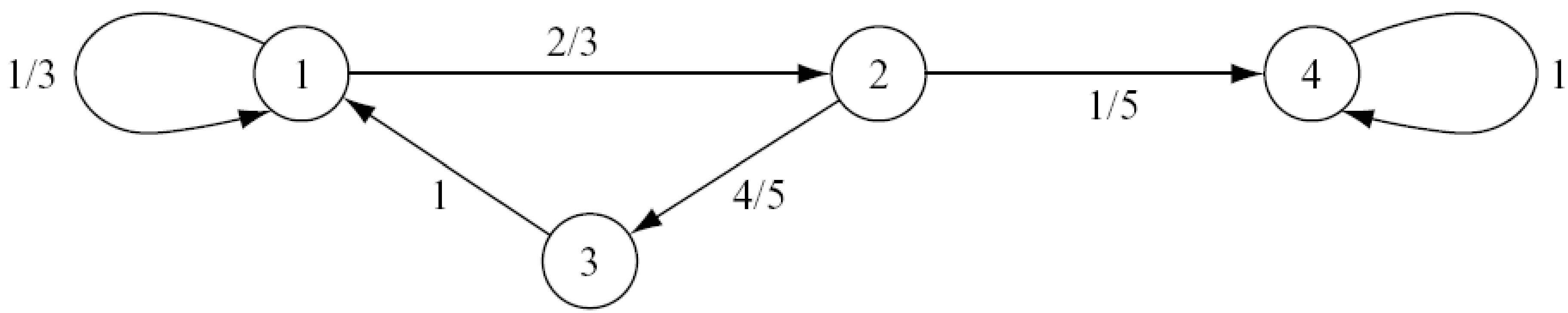
Ejemplo 1

- Los estados 1,2 y 3 son recurrentes
- El estado 4 es transitorio
- No hay estados periódicos
- Hay una cadena sencilla {1,2,3}



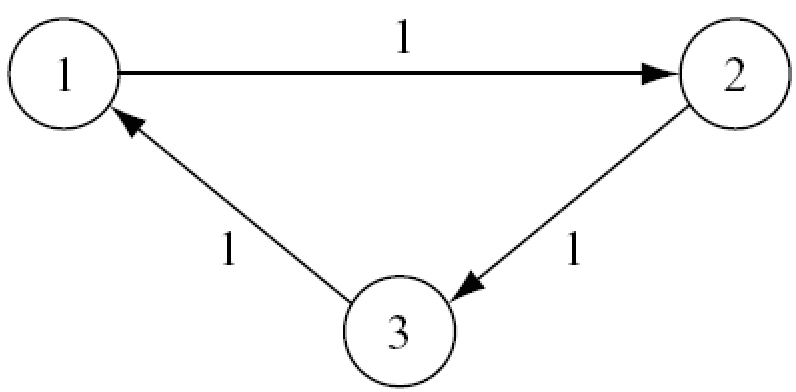
Ejemplo 2

- Los estados 1, 2 y 3 son ahora transitorios
- El estado 4 es absorbente (o trampa)



Ejemplo 3

- Tiene una cadena sencilla {1,2,3}
- Los tres estados son periódicos con periodo 3



Obteniendo la probabilidad de transición de n pasos

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = P \times P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.34 & 0.37 & 0.29 \\ 0.33 & 0.32 & 0.35 \\ 0.33 & 0.31 & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P^2 \times P = \begin{bmatrix} 0.34 & 0.37 & 0.29 \\ 0.33 & 0.32 & 0.35 \\ 0.33 & 0.31 & 0.36 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.334 & 0.339 & 0.327 \\ 0.333 & 0.331 & 0.336 \\ 0.333 & 0.330 & 0.337 \end{bmatrix}$$

Nota

- Para la matriz de este ejemplo y para un gran número de cadenas de Markov, encontramos que al multiplicar a la matriz por si misma muchas veces la matriz tiende a tener valores fijos
- Mas importante que eso es el hecho de que todos los miembros de una misma columna convergen hacia un mismo valor

Distribución de estados iniciales

- La probabilidad de que en el tiempo t=0 el proceso se encuentre en el estado i es

$$P[X(0) = i]$$

- Si la cadena de Markov tiene N estados

$$\sum_{i=1}^{N} P[X(0) = i] = 1$$

Probabilidad de estado límite

- La probabilidad de que en el instante n el proceso se encuentre en el estado j es

$$P[X(n) = j]$$

$$P[X(n) = j] = \sum_{i=1}^{N} P[X(0) = i] p_{ij}(n)$$

- Para cierta clase de cadenas de Markov, a medida que $n \to \infty$, $p_{ij}(n)$ no depende de i, lo cual significa que $P[X(n) = j]$ tiende a una constante
- Cuando dicho límite existe, definimos

$$\lim_{n \to \infty} P[X(n) = j] = \pi_j \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

Probabilidad de estado límite

$$\lim_{n \to \infty} P[X(n) = j] = \pi_j \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

- Sabemos que $$p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}(n-1)\, p_{kj}$$
- Y si los estados límite existen y no dependen del estado inicial entonces

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \pi_j = \lim_{n \to \infty} \sum_k p_{ik}(n-1)\, p_{kj}$$

$$= \sum_k \pi_k\, p_{kj}$$

Obteniendo las probabilidades de estados límite

- Definiendo el vector de probabilidades de estados límite como

$$\pi = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N].$$

$$\pi_j = \sum_k \pi_k p_{kj}$$

$$\pi = \pi P$$

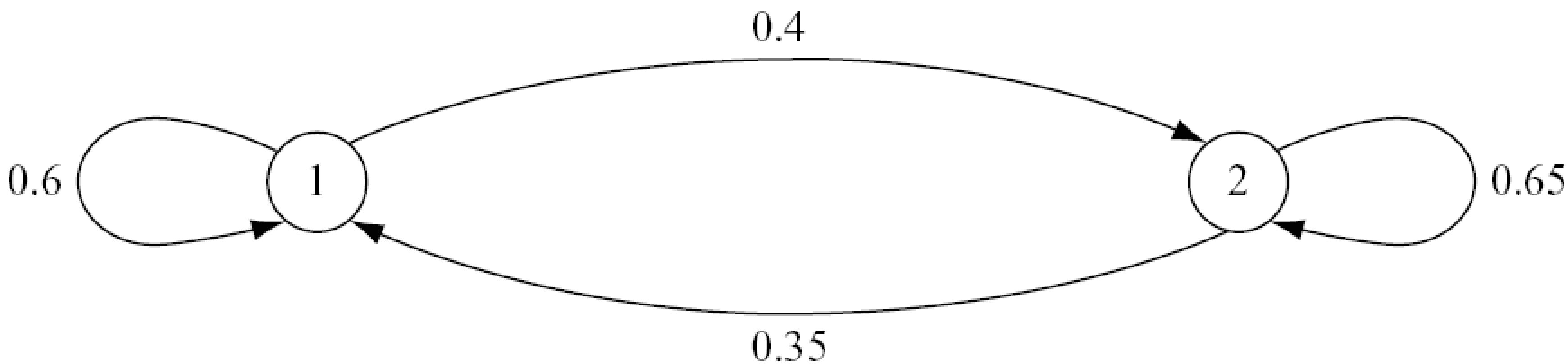
$$1 = \sum_j \pi_j$$

- El cual es un sistema de ecuaciones lineales a resolver

Condiciones para la existencia de estados límites

- En cualquier cadena de Markov aperiódica e irreductible, existen y son independientes del estado inicial
- Las probabilidades de los estados límites se deben interpretar como la probabilidad de que a largo plazo el proceso estará en dicho estado

Ejemplo



$$\pi_1 = 0.6\pi_1 + 0.35\pi_2$$

$$\pi_2 = 0.4\pi_1 + 0.65\pi_2$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2$$

Como hay mas ecuaciones que incógitas usamos solo

$$\pi_1 = 0.6\pi_1 + 0.35\pi_2$$

$$1 = \pi_1 + \pi_2$$

De la primera ecuación $\pi_1 = (0.35/0.4)\pi_2 = (7/8)\pi_2$

Substituyendo en la segunda $\pi = \{\pi_1, \pi_2\} = \{7/15, 8/15\}$

Calcular $p_{12}(3)$

$$p_{12}(3) = P[\{1 \to 1 \to 1 \to 2\} \cup \{1 \to 1 \to 2 \to 2\} \cup \{1 \to 2 \to 1 \to 2\} \\ \cup \{1 \to 2 \to 2 \to 2\}]$$

Como son eventos mutuamente excluyentes:

$$\begin{aligned} p_{12}(3) &= P[1 \to 1 \to 1 \to 2] + P[1 \to 1 \to 2 \to 2] + P[1 \to 2 \to 1 \to 2] \\ &\quad + P[1 \to 2 \to 2 \to 2] \\ &= (0.6)(0.6)(0.4) + (0.6)(0.4)(0.65) + (0.4)(0.35)(0.4) \\ &\quad + (0.4)(0.65)(0.65) \\ &= 0.525 \end{aligned}$$

Alternativamente

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = P \times P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4375 & 0.5625 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P \times P^2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4375 & 0.5625 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.475 & 0.525 \\ 0.459375 & 0.540625 \end{bmatrix}$$

Matrices doblemente estocásticas

- No solo los renglones sino tambien las columnas suman 1

$$\sum_i p_{ij} = 1$$

- Para este tipo de cadenas de Markov

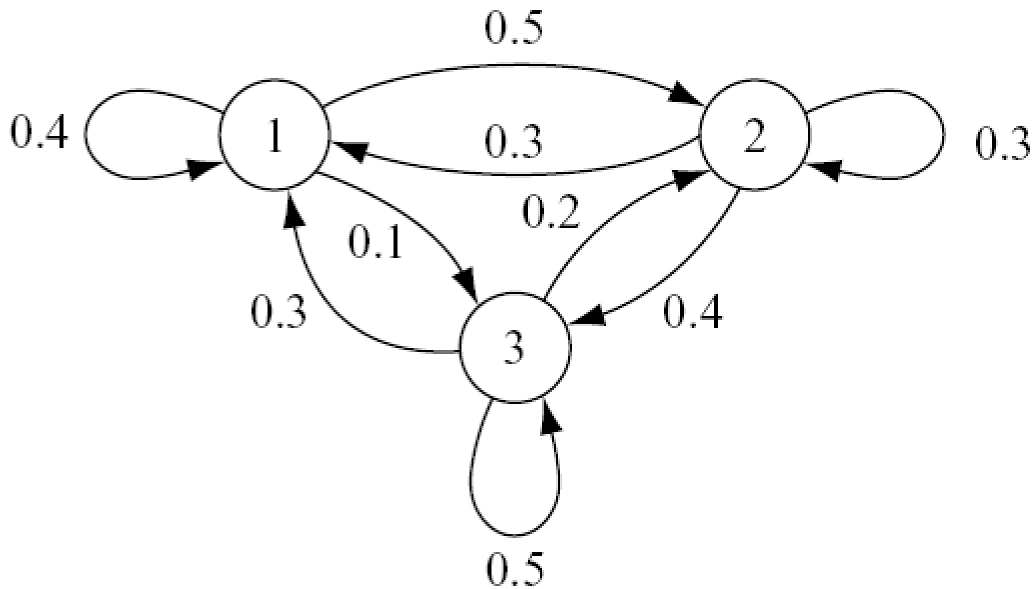
$$\pi_i = 1/N, i = 1, 2, \ldots, N$$

- Demostración

$$\pi_j = \sum_k \pi_k p_{kj}$$

Substituyendo $\pi_i = 1/N$ $\quad \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_k p_{kj} \Rightarrow 1 = \sum_k p_{kj}$

Ejemplo



$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$$

Tiempo esperado de estancia en un estado

- Sea D_i el número de unidades de tiempo que un proceso permanecería en el estado i antes de abandonarlo

$$p_{D_i}(d) = P[D_i = d] = P[X_0 = i, X_1 = i, X_2 = i, \ldots, X_{d-1} = i, X_d \neq i]$$

$$= p_{ii}^{d-1}(1 - p_{ii})$$

- Observe que se usó la regla de la cadena de Markov

Análisis transitorio de Cadenas de Markov de tiempo discreto

Recordemos que la probabilidad de transición en n pasos está dada por:

$$p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}(r)p_{kj}(n-r)$$

Se cumple entonces, para una cadena de Markov de N estados

$$p_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}(n)p_{kj} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

La transformada Z de $p_{ij}(n)$

$$g_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n)z^n$$

Aplicando transformada Z a ambos miembros tenemos:

$$z^{-1}[g_{ij}(z) - p_{ij}(0)] = \sum_{k=1}^{N} g_{ik}(z)p_{kj}$$

Análisis transitorio de Cadenas de Markov de tiempo discreto

$$z^{-1}[g_{ij}(z) - p_{ij}(0)] = \sum_{k=1}^{N} g_{ik}(z)\, p_{kj}$$

En forma matricial:

$$z^{-1}[G(z) - I] = G(z)P$$

$$G(z) - I = G(z)Pz$$

$$G(z)\{I - Pz\} = I$$

$$G(z) = [I - Pz]^{-1}$$

Análisis transitorio de Cadenas de Markov de tiempo discreto

Obtenemos P^n Mediante la inversa de G(z) obteniendo dos componentes, uno constante y un término transitorio

$$P^n = C + T(n)$$

$$G(z) = [I - Pz]^{-1} = \frac{1}{1-z}C + T(z)$$

Donde T(z) es la transformada Z de T(n)

El término constante tiene la característica de que todos los renglones son idénticos
Y sus elementos son las probabilidades de estados límite

Ejemplo

Obtener P^n para una cadena de Markov con la siguiente Matriz de transición entre estados

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$I - Pz = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-0.4z & -0.5z & -0.1z \\ -0.3z & 1-0.3z & -0.4z \\ -0.3z & -0.2z & 1-0.5z \end{bmatrix}$$

$$|I - Pz| = 1 - 1.2z + 0.21z^2 - 0.01z^3 = (1-z)(1-0.2z+0.01z^2)$$

$$= (1-z)(1-0.1z)^2$$

Ejemplo

$$[I - Pz]^{-1} = \frac{1}{(1-z)(1-0.1z)^2}\begin{bmatrix} 1-0.8z+0.07z^2 & 0.5z-0.23z^2 & 0.1z+0.17z^2 \\ 0.3z-0.03z^2 & 1-0.9z+0.17z^2 & 0.4z-0.13z^2 \\ 0.3z-0.03z^2 & 0.2z+0.07z^2 & 1-0.7z-0.03z^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-z}\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} + \frac{1}{1-0.1z}\begin{bmatrix} 2/3 & -7/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & -4/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{(1-0.1z)^2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} + (0.1)^n \begin{bmatrix} 2/3 & -7/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & -4/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$+ (n+1)(0.1)^n \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

La matríz asociada con (1-z) contiene las probabilidades de estados límites
Observe tambien que cada renglón de las otras matrices suma cero
Cuando n=0 obtenemos la matriz identidad
Cuando n=1 obtenemos P

El tiempo de la primera transición de i a j es:

$$T_{ij} = \min\{n \geq 1: X_n = j | X_0 = i\}$$

Previamente definimos la probabilidad de la primera transición como:

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n)$$

También recordar que podemos determinar recursívamente $f_{ij}(n)$

$$f_{ij}(1) = p_{ij}$$

$$f_{ij}(n) = \sum_{l \neq j} p_{il} f_{lj}(n-1)$$

La relación entre la probabilidad de transición en n pasos y la probabilidad de primera transición es

$$p_{ij}(n) = \sum_{m=1}^{n} f_{ij}(m) p_{jj}(n-m) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Como $p_{jj}(0) = 1$,esta expresión se puede convertir en:

$$p_{ij}(n) = \sum_{m=1}^{n-1} f_{ij}(m) p_{jj}(n-m) + f_{ij}(n) \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Podemos despejar $f_{ij}(n)$ para conlcuir:

$$f_{ij}(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ p_{ij}(n) & n = 1 \\ p_{ij}(n) - \sum_{m=1}^{n-1} f_{ij}(m) p_{jj}(n-m) & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

El tiempo medio de primera transición del estado i al j se determina mediante

$$m_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(n) = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_{kj} \qquad i \neq j$$

Como el tiempo que el proceso dura en cada estado es 1, esta ecuación dice que el tiempo promedio es el tiempo que dura en el estado i mas el tiempo medio de primera transición del estado k al j dado que el estado que sigue del i es el k

De manera similar, el tiempo de recurrencia del estado i es:

$$m_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n) = 1 + \sum_{k \neq i} p_{ik} m_{ki}$$

Ejemplo

Determinar el tiempo medio de primera transición del estado 1 al 3 para una cadena de Markov con la siguiente matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$m_{13} = 1 + p_{11}m_{13} + p_{12}m_{23}$$

$$= 1 + 0.4m_{13} + 0.5m_{23} \Rightarrow 0.6m_{13} = 1 + 0.5m_{23}$$

Necesitamos otra ecuación

$$m_{23} = 1 + p_{21}m_{13} + p_{22}m_{23}$$

$$= 1 + 0.3m_{13} + 0.2m_{23} \Rightarrow 0.8m_{23} = 1 + 0.3m_{13}$$

De donde:

$$m_{13} = 3.939$$

$$m_{23} = 2.737$$

Ejemplo

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Determinar m_{11}

$$m_{11} = 1 + p_{12}m_{21} + p_{13}m_{31} = 1 + 0.5m_{21} + 0.1m_{31}$$

$$m_{21} = 1 + p_{22}m_{21} + p_{23}m_{31}$$

$$= 1 + 0.3m_{21} + 0.4m_{31} \Rightarrow 0.7m_{21} = 1 + 0.4m_{31}$$

$$m_{31} = 1 + p_{32}m_{21} + p_{33}m_{31}$$

$$= 1 + 0.2m_{21} + 0.5m_{31} \Rightarrow 0.5m_{31} = 1 + 0.2m_{21}$$

$$m_{11} = 1.7187$$

$$m_{21} = 2.8125$$

$$m_{31} = 3.1250$$